Théorème de Féjer :

I Le développement

Le but de ce développement est de démontrer le théorème de Féjer et d'en donner un corollaire.

Théorème 1 : Théorème de Féjer [El Amrani, p.190] :
Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue (resp. dans L^p pour $p \in [1;+\infty[$) et 2π-périodique :

$$\lim_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0 \quad \text{(respectivement } \lim_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0)$$

Preuve :
On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique.
$*$ Cas où $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$:
L'application f est uniformément continue (théorème de Heine), ainsi pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
|f(\theta) - \sigma_n(f)(\theta)| = |f(\theta) - f * F_n(\theta)| &= \left| f(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)F_n(t)\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) - f(\theta - t))F_n(t)\mathrm{d}t \right| \ (\text{car } \|F_n\|_1 = 1) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_\varepsilon}^{\delta_\varepsilon} |f(\theta) - f(\theta-t)|F_n(t)\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi;\pi]\setminus[-\delta_\varepsilon;\delta_\varepsilon]} |f(\theta) - f(\theta-t)|F_n(t)\mathrm{d}t \\
&\leq \varepsilon \|F_n\|_1 + \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi;\pi]\setminus[-\delta_\varepsilon;\delta_\varepsilon]} 2\|f\|_\infty F_n(t)\mathrm{d}t \\
&\leq \varepsilon + \frac{2}{\pi}\|f\|_\infty \int_{\delta_\varepsilon}^{\pi} F_n(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On en déduit que $\|f - \sigma_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{2}{\pi}\|f\|_\infty \int_{\delta_\varepsilon}^{\pi} F_n(t)\mathrm{d}t$.

Or, $\lim_{n\to+\infty} \int_{\delta_\varepsilon}^{\pi} F_n(t)\mathrm{d}t = 0$, d'où : $\lim_{n\to+\infty} \|f - \sigma_n(f)\|_\infty = 0$.
Ainsi, $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

$*$ Cas où $f \in L^p(\mathbb{T})$:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f(\theta) - \sigma_n(f)(\theta) = f(\theta) - f * F_n(\theta) &= f(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)F_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) - f(\theta-t))F_n(t)\mathrm{d}t \ \left(\text{car } \|F_n\|_1 = 1\right)
\end{aligned}$$

Donc par l'inégalité de Hölder avec la mesure $\mu(t) = F_n(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$, on a :

$$\begin{aligned}
|f(\theta) - \sigma_n(f)(\theta)| &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f(\theta - t)|^p \mathrm{d}\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} 1^q \mathrm{d}\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}}}_{=1} \\
&= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f(\theta - t)|^p \mathrm{d}\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\|f - \sigma_n(f)\|_p^p &\leq \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f(\theta-t)|^p \mathrm{d}\mu(t)\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \\
&\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f(\theta-t)|^p \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)\mathrm{d}\mu(t) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\|f - \tau_{-t}(f)\|_p^p}_{=g(t)} \mathrm{d}\mu(t)
\end{aligned}$$

Or, par continuité des "petites translations" dans $L^p(\mathbb{R})$, on a la relation : $\lim_{t\to0} \|f - \tau_{-t}(f)\|_p^p = 0$ et ainsi g et continue et $\lim_{t\to0} g(t) = g(0) = 0$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\|f - \sigma_n(f)\|_p^p \leq \int_{-\pi}^{\pi} g(t)F_n(t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} &\underset{u=-t}{=} \int_{-\pi}^{\pi} g(-u)F_n(-u)\frac{\mathrm{d}u}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} g(0-u)F_n(u)\frac{\mathrm{d}u}{2\pi} \ (\text{car } F_n \text{ est paire}) \\
&= (g * F_n)(0) = \sigma_n(g)(0)
\end{aligned}$$

Enfin, puisque g est continue et 2π-périodique, on a par le premier point que $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n(g)(0) = g(0) = 0$ et ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \|f - \sigma_n(f)\|_p^p = 0$.

■

Corollaire 2 : [El Amrani, p.194]
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Si la suite $(S_N(f)(x_0))_{N\in\mathbb{N}}$ converge de limite notée ℓ, alors on a $\ell = f(x_0)$.
De plus, si la suite $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n(x)$.

Preuve :
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique et $x_0 \in \mathbb{R}$.
$*$ Supposons que la suite $(S_N(f)(x_0))_{N\in\mathbb{N}}$ converge de limite notée ℓ.
En particulier cette suite converge en moyenne de Cesàro, donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \sigma_N(f)(x_0) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x_0) = x_0$$

Or comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, on a par le théorème de Féjer que $\lim_{N\to+\infty} \sigma_N(f)(x_0) = f(x_0)$ et donc par unicité de la limite on a $\ell = f(x_0)$.

$*$ Supposons désormais que la suite $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite numérique $(S_N(f)(x))_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ (par le point précédent) et donc on a directement que $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n(x)$.

■

II Remarques sur le développement

II.1 Résultat(s) utilisé(s)

Dans ce développement, on a utilisé le fait que F_n est de norme égale à 1 (cf. ci-dessous) et que les "petites translations" sont continues dans L^p pour $p \in [1; +\infty[$.
On rappelle la démonstration ci-dessus :

$*$ Supposons d'abord que $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$.
La fonction f est donc uniformément continue (par le théorème de Heine) et donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tq } |a| \leq \eta \implies \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x-a) - f(x)| \leq \varepsilon$$

On fixe un tel ε.
Pour $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \leq \eta$, on a :

$$\begin{aligned}\|\tau_{-a}(f) - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |f(x-a) - f(x)|^p \mathrm{d}x \\ &= \int_{(a+\{f\neq 0\})\cup\{f\neq 0\}} |f(x-a) - f(x)|^p \mathrm{d}x. \\ &\leq \varepsilon^p \left(\lambda(\{f \neq 0\} + \lambda(a + \{f\neq 0\}))\right) \leq 2\lambda\left(\overline{\{f\neq 0\}}\right)\varepsilon^p\end{aligned}$$

Or, $\lambda\left(\overline{\{f\neq 0\}}\right)$ est fini car $\overline{\{f\neq 0\}}$ est compact. Par conséquent :

$$|a| \leq \eta \implies \|\tau_{-a}(f) - f\|_p \leq \left(2\lambda\left(\overline{\{f\neq 0\}}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon$$

$*$ Supposons désormais que $f \in L^p(\mathbb{R})$.
Par densité des fonctions continues à support compact dans $\left(L^p, \|\cdot\|_p\right)$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

Or, on a :

$$\begin{aligned}\|\tau_{-a}(f) - f\|_p &\leq \|\tau_{-a}(f) - \tau_{-a}(f_n)\|_p + \|\tau_{-a}(f_n) - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p \\ &\leq 2\|f_n - f\|_p + \|\tau_{-a}(f_n) - f\|_p\end{aligned}$$

De plus, par le premier point, pour $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel $n_\varepsilon \geq 1$ tel que $\|f_{n_\varepsilon} - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{4}$ et par ailleurs, il existe $\eta > 0$ tel que $\|\tau_{-a}(f_{n_\varepsilon}) - f_{n_\varepsilon}\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \leq \eta_\varepsilon$.

Finalement, on a :

$$|a| \leq \eta \implies \|\tau_{-a}(f) - f\|_p \leq \varepsilon$$

Remarque 3 : [El Amrani, p.74]
$*$ On a même montré que pour $p \in [1; +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, l'application $a \longmapsto \tau_a(f)$ est uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $L^p(\mathbb{R})$ puisque l'on a :

$$\|\tau_{-a}(f) - \tau_{-b}(f)\|_p = \|\tau_{-b}(\tau_{b-a}(f) - f)\|_p = \|\tau_{b-a}(f) - f\|_p$$

$*$ Les résultats précédents sont encore valables pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$.

II.2 Noyaux de Dirichlet et de Féjer

Dans ce développement on a également utilisé quelques résultats sur les noyaux de Féjer. On donne ainsi quelques rappels sur les noyaux de Dirichlet et de Féjer.

Définition 4 : N-ième somme de Cesàro [El Amrani, p.181] :
Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$, on note $\sigma_N(f)$ la **N-ième somme de Cesàro de la série de Fourier de** f définie par $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$.

Définition 5 : Noyau de Dirichlet [El Amrani, p.184] :
On appelle **noyau de Dirichlet d'ordre** N la fonction $D_N : x \longmapsto \sum_{n=-N}^{N} e_n(x)$.

Proposition 6 : [El Amrani, p.184]

$*$ La fonction D_N est une fonction paire et 2π-périodique.
$*$ La fonction D_N est le prolongement par continuité de $\mathbb{R}$ de la fonction définie de $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.
$*$ Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$ on a $S_N(f) = f * D_N$.

Proposition 7 : [El Amrani, p.185]

Lorsque N tend vers $+\infty$, on a $\|D_N\|_1 = \frac{4}{\pi^2}\ln(N) + O(1)$.

Définition 8 : Noyau de Féjer [El Amrani, p.185] :

On appelle **noyau de Féjer d'ordre** N la fonction $F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k$.

Proposition 9 : [El Amrani, p.185]

$*$ Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a :

$$F_N = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)e_n \text{ et } \sigma_N(f) = f * \left(\sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)c_n(f)e_n\right)$$

En particulier, F_N est le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par $x \longmapsto \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$.
$*$ La suite $(F_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}$.

II.3 Pour aller plus loin...

Le théorème de Féjer possède comme corollaire le théorème de Weierstrass :

Théorème 10 : Théorème de Weierstrass :

$*$ Toute fonction continue sur un segment $[a;b]$ à valeurs réelles est limite uniforme de fonctions polynomiales à coefficients réels.
$*$ Pour $p \in [1;+\infty[$, les polynômes trigonométriques sont denses dans $\left(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p\right)$.

II.4 Recasages

Recasages : 209 - 241 - 246.

III Bibliographie

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.